BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2013

УДК 517.9

АНАЛОГ ДИСКРЕТНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ РАЗНОСТНЫМ АНАЛОГОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БАРБАШИНА

Ж.Б.АХМЕДОВА, С.Т.АЛИЕВА*, К.Б.МАНСИМОВ*,****

Бакинский Государственный Университет

*****Институт Кибернетики НАН Азербайджана***

mansimov@front.ru

Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения типа Барбашина. Установлено необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума. Затем получен аналог линеаризованного условия максимума. В случае открытости области управления выведен аналог уравнения Эйлера.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Барбашина, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума, уравнения в вариациях, аналог уравнения Эйлера.

В работах [1-4] и др. рассмотрены различные задачи оптимального управления, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями типа Барбашина. Установлены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка и исследованы особые случаи. В работе же [5] в общем случае получено интегральное представление решения системы линейных неоднородных интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина. Представляется интересным изучение подобных задач управления в случае разностного аналога интегро-дифференциального уравнения типа Барбашина.

В связи с этим в предлагаемой работе ставится и изучается одна задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Барбашина. Получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается следующей системой разностных уравнений

$$z(t+1,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1} f\left(t,x,s,z(t,s),u(t,s)\right),$$
$$t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \tag{1}$$
с начальным условием
$$z(t_0,x)=a(x),\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1. \tag{2}$$

Здесь $f(t,x,s,z,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z, t_0,t_1,x_0,x_1 – заданные числа, причем разность t_1-t_0 и x_1-x_0 есть натуральные числа, $a(x)$ – заданная n-мерная дискретная вектор-функция, $u(t,x)$ – r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, т.е.
$$u(t,x)\in U, t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1; x=x_0,x_0+1,\dots,x_1. \tag{3}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

На решениях системы (1)-(2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал
$$S(u)=\sum_{x=x_o}^{x_1}\varphi(z(t_1,x)). \tag{4}$$
Здесь $\varphi(z)$ – заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Будем изучать задачу о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление $u(t,x)$ доставляющий минимум функционалу (4), при ограничениях (1)-(3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t,x),z(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Аналог дискретного условия максимума. Предположим, что $(u(t,x),z(t,x))$ – фиксированный допустимый процесс, а множество
$$f(t,x,s,z(t,s),U)=\{\alpha:\alpha=f(t,x,s,z(t,s),v),v\in U\} \tag{5}$$
выпукло.

Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, $v(t,x)$ – произвольное допустимое управление такое, что
$$\begin{aligned}z(t+1,x;\varepsilon)&=\sum_{s=x_0}^{x_1} f\left(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),u(t,s;\varepsilon)\right)\equiv\\&\equiv\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[f\left(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),u(t,s)\right)+\varepsilon\left[f\left(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),v(t,s)\right)-\right.\right.\\&\left.\left.-f\left(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),u(t,s)\right)\right]\right],\end{aligned} \tag{6}$$
$$z(t_0,x;\varepsilon)=a(x),\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1. \tag{7}$$

Это возможно в силу выпуклости множества (5).

Положим

$$y(t,x)=\frac{\partial z(t,x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big/_{\varepsilon=0}. \tag{8}$$

В силу условий гладкости, наложенные на правую часть уравнения (6), получаем, что вектор-функция $y(t,x)$ определяемая формулой (8), является решением задачи (уравнения в вариациях)

$$y(t+1,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial z}y(t,s)+\right.$$
$$\left.+\left[f(t,x,s,z(t,s),v(t,s))-f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))\right]\right], \tag{9}$$

$$y(t_0,x)=0,\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1. \tag{10}$$

Пусть $\psi(t,x)$ – пока неизвестная n-мерная вектор-функция. Умножая обе части соотношения (9) слева скалярно на $\psi(t,x)$, а затем, суммируя обе части полученного соотношения по t и x от t_0 до t_1-1 и от x_0 до x_1, соответственно, получим:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t+1,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\frac{\partial f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial z}y(t,s)+\right.$$
$$\left.+\psi'(t,x)\left[f(t,x,s,z(t,s),v(t,s))-f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))\right]\right]=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\frac{\partial f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}y(t,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\left[f(t,s,x,z(t,x),v(t,x))-f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))\right]\right]. \tag{11}$$

Используя формулу Тейлора, получаем, что

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\frac{d}{d\varepsilon}\left[\sum_{x=x_0}^{x_1}\varphi(z(t_1,x;\varepsilon))\right]=$$
$$=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(z(t_1,x))}{\partial z}y(t_1,x)+o(\varepsilon).$$

Отсюда с учетом тождества (11) имеем:

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(z(t_1,x))}{\partial z}y(t_1,x)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t+1,x)-$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\frac{\partial f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}y(t,x)- \tag{12}$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)[f(t,s,x,z(t,x),v(t,x))-f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))]\right]+o(\varepsilon).$$

Нетрудно доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t+1,x)=\sum_{x=x_0}^{x_1}[\psi'(t_1-1,x)y(t_1,x)-$$

$$-\psi'(t_0-1,x)y(t_0,x)]+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t-1,x)y(t,x). \tag{13}$$

С учетом соотношения (13), специальное приращение (12) критерия качества соответствующее допустимым управлениям $u(t,x;\varepsilon)$ и $u(t,x)$, может быть представлена в виде

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(z(t_1,x))}{\partial z}y(t_1,x)+$$

$$+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t_1-1,x)y(t_1,x)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t-1,x)y(t,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\frac{\partial f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}\right]y(t,x)- \tag{14}$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)[f(t,s,x,z(t,x),v(t,x))-f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))]\right]+o(\varepsilon).$$

Пусть n-мерная вектор-функция $\psi(t,x)$ является решением задачи

$$\psi(t-1,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial f'(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}\psi(t,s), \tag{15}$$

$$\psi(t_1-1,x)=-\frac{\partial\varphi(z(t_1,x))}{\partial z}. \tag{16}$$

Задачу (15)-(16) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче.

Уравнение (15) является линейным однородным разностным уравнением относительно $\psi(t,x)$.

При выполнении соотношений (15)-(16) специальная формула приращения (14) критерия качества (4) примет вид

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}[H(t,x,s,z(t,x),v(t,x),\psi(t,s))-$$

$$-H(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))]+o(\varepsilon), \tag{17}$$

где по определению

$$H(t,x,s,z(t,x),v,\psi(t,s))=\psi'(t,s)f(t,s,x,z(t,x),v).$$

Из разложения (17) следует

Теорема 1. Пусть множество (5) выпукло. Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[H(t,x,s,z(t,x),v(t,x),\psi(t,s))-H(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))\right]\le 0, \quad (18)$$

выполнялось для всех $v(t,x)\in U$, $t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1$, $x=x_0,x_0+1,\dots,x_1$.

Непосредственным следствием теоремы 1 является

Теорема 2. Если множество (5) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в рассматриваемой задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[H(\theta,\xi,s,z(\theta,\xi),w,\psi(\theta,s))-H(\theta,\xi,s,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,s))\right]\le 0, \quad (19)$$

выполнялось для всех $\theta=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1$, $\xi=x_0,x_0+1,\dots,x_1$; $w\in U$.

3. Линеаризованные необходимые условия оптимальности. Предположим, что множество U выпуклое, а $f(t,x,s,z,u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u).

Пусть $\mu\in[0,1]$ произвольное число, $v(t,x)-$произвольное допустимое управление.

Через $u(t,x;\mu)=u(t,x)+\mu[v(t,x)-u(t,x)]$ обозначим проварьированное («возмущенное») управление. Допустим, что $z(t,x;\mu)$ является решением задачи (1)-(2), соответствующее допустимому управлению $u(t,x;\mu)$, т.е.

$$z(t+1,x;\mu)=\sum_{s=x_0}^{x_1}f(t,x,s,z(t,s;\mu),u(t,s;\mu)), \quad (20)$$

$$z(t_0,x;\mu)=a(x). \quad (21)$$

Введем обозначение

$$p(t,x)=\left.\frac{\partial z(t,x;\mu)}{\partial\mu}\right/_{\mu=0}. \quad (22)$$

Из условий гладкости, наложенные на правую часть уравнения (20) следует, что $p(t,x)$ является решением линеаризованной задачи

$$p(t+1,x)= \quad (23)$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial z}p(t,s)+\frac{\partial f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial u}(v(t,s)-u(t,s))\right],$$

$$p(t_0,x)=0. \quad (24)$$

Используя (20)-(22) и выражение $u(t,x;\mu)$, по схеме аналогичной схеме доказательства разложения (17), доказывается, что

$$S(u(t,x;\mu))-S(u(t,x))=$$

$$=-\mu\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))}{\partial u}\right](v(t,x)-u(t,x))+o(\mu). \quad (25)$$

При помощи разложения (25) доказывается

Теорема 3. Если множество U выпуклое, а $f(t,x,s,z,u)$ непрерывна, по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u), то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в рассматриваемой задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))}{\partial u}\right](v(t,x)-u(t,x))\le 0,$$

выполнялось для всех $v(t,x)\in U$, $t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1$.

Непосредственным следствием теоремы 3 является

Теорема 4. (Аналог поточечного линеаризованного принципа максимума). При выполнении условий теоремы 3 для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(\theta,\xi,s,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,s))}{\partial u}(w-u(\theta,\xi))\le 0,$$

выполнялось для всех $\theta=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad \xi=x_0,x_0+1,...,x_1;\ w\in U$.

4. Аналог уравнения Эйлера. Рассмотрим случай открытой области управления. Пусть множество U открытое, а $f(t,x,s,z,u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u).

В силу открытости области управления U специальное приращение управления $u(t,x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\nu(t,x)=\nu\delta u(t,x),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1. \quad (26)$$

Здесь $\nu-$ достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t,x)\in R^r$ $t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1$ произвольная ограниченная r-мерная вектор-функция (допустимая вариация управления).

Через $\Delta z_\nu(t,x)$ обозначим решения задачи

$$\Delta z_\nu(t+1,x)=$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[f(t,x,s,z(t,s)+\Delta z_\nu(t,s),u(t,s)+\Delta u_\nu(t,s))-f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))\right], \quad (27)$$

$$\Delta z_\nu(t_0,x)=0. \quad (28)$$

Пусть $\delta z(t,x)$ является решением системы

$$\delta z(t+1,x)=$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial z}\delta z(t,s)+\frac{\partial f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial u}\delta u(t,s)\right], \tag{29}$$

$$\delta z(t_0,x)=0. \tag{30}$$

Систему (29)-(30) назовем, следуя [6] уравнением в вариациях в задаче (1)-(4).

Имеет место

Лемма 1. Решение $\Delta z_\nu(t,x)$ задачи (27)-(28) допускает разложение

$$\Delta z_\nu(t,x)=\nu\delta z(t,x)+o(t,x;\nu). \tag{31}$$

При помощи (26), (31) специальное приращение критерия качества (4) представляется в виде

$$S(u(t,x)+\nu\delta u(t,x))-S(u(t,x))=$$

$$=-\nu\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))}{\partial u}\delta u(t,x)\right]+o(\nu).$$

Отсюда в силу определения классической вариации функционала (см. напр. [6, 7]) следует, что первая вариация функционала качества (4) имеет вид

$$\delta^1 S(u;\delta u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))}{\partial u}\right]\delta u(t,x). \tag{32}$$

Следовательно, в силу того, что в случае открытости области управления первая вариация функционала качества вдоль оптимального управления равняется нулю, получаем, что вдоль оптимального процесса $(u(t,x),z(t,x))$ для всех $\delta u(t,x)\in R^r$, $t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))}{\partial u}\right]\delta u(t,x)=0. \tag{33}$$

При помощи (33) доказывается

Теорема 5. Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы соотношение

$$\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(\theta,\xi,s,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,s))}{\partial u}=0, \tag{34}$$

выполнялось для всех $\theta=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1,\quad \xi=x_0,x_0+1,\dots,x_1$.

Соотношение (34) является аналогом уравнения Эйлера (см. напр. [6, 7]) и представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хотеев А.Л. Задача оптимального управления для интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина // Проблемы управления и оптимизации. Мн. 1976, с. 74-87.
2. Хотеев А.Л. Об одной минимаксной задаче для интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина // Актуальные задачи теории динамических систем управления. Мн. Наука и техника, 1989, с. 169-171.
3. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Задача оптимального управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Барбашина при функциональных ограничениях типа неравенств // Научные известия Сумгаитского Государственного Университета. 2008, т.8, №2, с. 23-28.
4. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Об одной задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Барбашина // Известия НАН Азербайджана. Сер. Физ- техн. И матем. Наук. 2008, №3, с. 47-51.
5. Ахмедова Ж.Б., Исмаилов И.Р., Мансимов К.Б. О представлении решений одного класса систем интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина // Научные известия Сумгаитского Государственного Университета. 2007, т.7, №1, с. 30-34.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 560 с.

BARBAŞİN TİP İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİYİN FƏRQ ANALOQU İLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR OPTİMAL İDARƏ MƏSƏLƏSİNDƏ DİSKRET MAKSİMUM PRİNSİPİNİN ANALOQU

J.B.ƏHMƏDOVA, S.T.ƏLİYEVA, K.B. MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Məqalədə Barbaşin tip inteqro-diferensial tənliyin fərq analoqu ilə təsvir olunmuş bir optimal idarə məsələsinə baxılır. Diskret maksimum şərtinin analoqu isbat olunmuşdur. Xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqu alınmışdır. İdarə oblastı açıq olduqda Eyler tənliyinin analoqu çıxarılmışdır.

Açar sözlər: Barbaşin tip inteqro-diferensial tənlik, optimallıq üçün zəruri şərt, diskret maksimum prinsipi, variasiyalı tənlik, Eyler tənliyinin analoqu.

ANALOGUE OF THE DISCRETE MAXIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL PROBLEM, DESCRIBED BY THE DIFFERENCE ANALOGUE OF THE BARBASHIN TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zh.B.AHMADOVA, S.T.ALIYEVA, K.B.MANSIMOV

SUMMARY

An optimal control problem described by the difference analogue of integro-differential equation of Barbashin type is considered. A necessary condition of optimality in the form of discrete maximum conditions is defined. Then, an analogue of the liberalized maximum condition is obtained. In the case of open control area an analogue of the Euler equation has been derived.

Key words: Barbashin type integro-differential equation, necessary optimality condition, the discrete maximum principle, the variational equations, the analogue of the Euler equation

Поступила в редакцию: 16.05.2013 г.
Подписано к печати: 24.05.2013 г.